2019北京海淀区高三（上）期末数 学（理科） 2019.01

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

**一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）双曲线的左焦点的坐标为

（A） （B） （C）  （D）

（2）已知向量，且，则的夹角大小为

（A） （B） （C） （D）

（3）已知等差数列满足，公差，且成等比数列，则

（A） （B） （C） （D）

（4）直线被圆截得的弦长为，则的值为

（A） （B） （C） （D）

（5）以正六边形的个顶点中的个作为顶点的三角形中，等腰三角形的个数为

（A） （B） （C） （D）

（6）已知函数 ，则“”是“函数在区间 上存在零点”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数是的导函数，则下列结论中错误的是

（A）函数的值域与的值域相同

（B）若是函数的极值点，则是函数的零点

（C）把函数的图象向右平移个单位，就可以得到函数的图象

（D）函数和在区间上都是增函数

（8）已知集合. 若，且对任意的，均有，则集合中元素个数的最大值为

（A）25 （B）49 （C）75 （D）99

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）以抛物线的焦点为圆心，且与其准线相切的圆的方程为 ．

（10）执行如下图所示的程序框图，当输入的值为，值为时，输出的值为 ．



开始

输出

结束

是

否

输入,









（11）某三棱锥的三视图如上图所示，则这个三棱锥中最长的棱与最短的棱的长度分别为 ， .

（12）设关于的不等式组表示的平面区域为，若中有且仅有两个点在平面区域内，则的最大值为 ．

（13）在中，，且，则 ．

（14）正方体的棱长为1，动点在线段上，

动点在平面上，且平面.

(Ⅰ) 当点与点重合时，线段的长度为 ；

（Ⅱ）线段长度的最小值为 ．

**三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。**

（15）（本小题满分13分）

已知函数，其中.

(Ⅰ)比较的大小；

(Ⅱ)求函数在区间上的最小值.

（16）（本小题满分13分）

为迎接年冬奥会，北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核. 记表示学生的考核成绩，并规定为考核优秀. 为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了名学生的考核成绩，并作成如下茎叶图：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 6 |  |  |  |  |
| 6 | 0 | 1 | 4 | 3 | 3 | 5 | 8 |  |
| 7 | 2 | 3 | 7 | 6 | 8 | 7 | 1 | 7 |
| 8 | 1 | 1 | 4 | 5 | 2 | 9 |  |  |
| 9 | 0 | 2 | 1 | 3 | 0 |  |  |  |

(Ⅰ)从参加培训的学生中随机选取1人，请根据图中数据，估计这名学生考核为优秀的概率；

(Ⅱ)从图中考核成绩满足的学生中任取人，设表示这人中成绩满足的人数，求的分布列和数学期望；

(Ⅲ)根据以往培训数据，规定当时培训有效. 请你根据图中数据，判断此次冰雪培训活动是否有效，并说明理由.

（17）（本小题满分14分）

在四棱锥中， 平面平面， 底面为梯形,，,且.

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）求二面角的余弦值；

（Ⅲ）若是棱的中点，求证：对于棱上任意一点，

与都不平行.

（18）（本小题满分14分）

已知椭圆:, 过点的直线与椭圆交于不同的两点,.

(Ⅰ) 求椭圆的离心率；

(Ⅱ) 若点关于轴的对称点为，求线段长度的取值范围.

（9）（本小题满分13分）

已知函数.

（Ⅰ）当时，求曲线在点处的切线方程；

（Ⅱ）当时，求证:对任意的成立.

（20）（本小题满分13分）

设为不小于的正整数，集合,对于集合中的任意元素，，记

.

(Ⅰ) 当时，若，请写出满足的所有元素；

(Ⅱ) 若，且，求的最大值和最小值；

（Ⅲ）设是的子集，且满足：对于中的任意两个不同元素 ，有成立，求集合中元素个数的最大值.

数学试题答案

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.**

1. A 2. B 3. D 4. A 5. C 6. C 7.C 8. D

**二、填空题:本大题共6小题，每小题5分，共30分.**

9.  10.  11.  12. 

13.  14. 

**三、解答题: 本大题共6小题，共80分.**

15．解：（Ⅰ）因为



所以

因为，所以，所以

（Ⅱ）因为





设 ，所以

所以

其对称轴为

当，即 时，在时函数取得最小值

当，即时，在时函数取得最小值

16.解：（Ⅰ）设该名学生考核成绩优秀为事件

由茎叶图中的数据可以知道，名同学中，有名同学考核优秀

所以所求概率约为 

（Ⅱ）的所有可能取值为

因为成绩的学生共有人，其中满足的学生有人

所以， 

， 

随机变量的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |



（Ⅲ）根据表格中的数据，满足的成绩有个

所以

所以可以认为此次冰雪培训活动有效.

17．解：（Ⅰ）在平面中过点作，交于

因为平面平面

平面

平面平面

所以平面

因为平面

所以 

又，且

所以平面

（Ⅱ）因为平面，所以

又，

以为原点，所在直线分别为轴，建立空间直角坐标系

所以，

因为平面，所以取平面的法向量为

设平面的法向量为

因为，所以

所以

令 ，则 ，所以

所以

由题知为锐角，所以的余弦值为

（Ⅲ）

**法一：**

假设棱上存在点，使得，显然与点不同

所以四点共面于

所以，

所以，

所以就是点确定的平面，所以

这与为四棱锥矛盾，所以假设错误，即问题得证

**法二：**

假设棱上存在点，使得

连接，取其中点

在中，因为分别为的中点，所以

因为过直线外一点只有一条直线和已知直线平行，所以与重合

所以点在线段上，所以是，的交点，即就是

而与相交，矛盾，所以假设错误，问题得证

法三：假设棱上存在点，使得，

设，所以

因为，所以

所以有，这个方程组无解

所以假设错误，即问题得证

18．解：（Ⅰ）

因为，所以

所以离心率

（Ⅱ）**法一**：

设

显然直线存在斜率，设直线的方程为

所以，所以

，所以

所以

因为

所以

因为



所以 





因为，所以

**法二**：

设

当直线是轴时，

当直线不是轴时，设直线的方程为

所以，所以，

 ，所以

所以

因为

所以

因为 

所以



因为，所以

综上，的取值范围是.

19．解：（Ⅰ）因为

所以

当时，

所以，而

曲线在处的切线方程为

化简得到

（Ⅱ）**法一**：

因为，令

得

当时，，，在区间 的变化情况如下表:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

所以在上的最小值为中较小的值，

而，所以只需要证明

因为，所以

设，其中，所以

令，得，

当时，，，在区间 的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 0 |  |
|  |  | 极小值 |  |

所以在上的最小值为，而

注意到， 所以，问题得证

**法二**：

因为“对任意的，”等价于“对任意的，”

即“，”，故只需证“，”

设 ，所以

设，

令，得

当时，，，在区间 的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 0 |  |
|  |  | 极小值 |  |

所以上的最小值为，而

所以时，，所以在上单调递增

所以

而，所以，问题得证

**法三：**

“对任意的，”等价于“在上的最小值大于”

因为，令

得

当时，，，在在上的变化情况如下表:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

所以在上的最小值为 中较小的值，

而，所以只需要证明

因为，所以

注意到和，所以

设，其中

所以

当时，，所以单调递增，所以

而

所以，问题得证

**法四：**

因为，所以当时，

设，其中

所以

所以，，的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 0 |  |
|  |  | 极小值 |  |

所以在时取得最小值，而

所以时，

所以

20. 解：(Ⅰ) 满足的元素为

（Ⅱ）记，，

注意到，所以，

所以





因为，所以

所以中有个量的值为1，个量的值为0.

显然

，

当，时，

满足，.所以的最大值为

又



注意到只有时，，否则

而中个量的值为1，个量的值为0

所以满足这样的元素至多有个，

当为偶数时，.

当时，满足，且.

所以的最小值为

当为奇数时，且，这样的元素至多有个，

所以 .

当，时，满足，.

所以的最小值为

综上：的最大值为，当为偶数时，的最小值为，当为奇数时，.

（Ⅲ）中的元素个数最大值为

设集合是满足条件的集合中元素个数最多的一个

记，



显然

集合中元素个数不超过个，下面我们证明集合中元素个数不超过个

，则

则中至少存在两个元素 

，

因为 ，所以 不能同时为

所以对中的一组数而言，

在集合中至多有一个元素满足同时为

所以集合中元素个数不超过个

所以集合中的元素个数为至多为

记，则中共个元素，

对于任意的，，.

对，记 其中，，

记，

显然，，均有.

记，中的元素个数为，且满足，，均有.

综上所述，中的元素个数最大值为.